748. 大数ノ法則, III

北川　敏男（阪大）

聯鎖級數ニ關スル大數ノ法則ヲ導ク準備トシテ、コレ

カラ、聯鎖級數ノ發散及ビ收斂ニツイテノ諸研究ヲ紹介スル。始メニ述ベタ如ク、独立級數ニ関スル結果ヲ知レルモノトシ、ソレヲバ聯鎖級數ヘ拡張スル方針デ吾々ハ進ムノデアル。

独立級數ノ發散及ビ收斂ニ関スル基本的ナ結果トシテ、Liapounoff ノ定理トイフノガアル：

定理 A.（Liapounoff）独立ナ確率変數ノ系列 $\{X_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ニ於テ、次ノ四條件ガ悉ク満足サレテ居ルトスル；

$$(1^\circ)\quad E(X_\nu)=0\qquad(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$(2^\circ)\quad E(X_\nu^2)\equiv\sigma_\nu^2<\infty\qquad(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$(3^\circ)\quad |X_\nu|\leqq k\qquad(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$(4^\circ)\quad b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2\to\infty\quad(n\to\infty\text{ ノトキ})$$

然ルトキニハ，S_n/b_n $(S_n\equiv X_1+X_2+\cdots+X_n)$ ノ分布函數ハ，$n\longrightarrow\infty$ ノトキ，Gauss ノ分布函數 $\Phi(x)$ ヘスベテノ x ニ関シテ一様ニ收斂スル。

吾々ハ，Lévy ニ從ヒ，コノ定理ヲバ、適當ナ條件ヲツケテ聯鎖級數ヘ拡張シヤウ。

§3. Liapounoff ノ定理ニ對スル Lindeberg-Lévy ノ方法[1]

前述ノ Liapounoff ノ定理ノ四條件ニ對應シテ Lévy ハ一般ナ聯鎖級數ノ始メノ n 個ノ X_ν ニ関シテ

---

(1) Bulletin Sc. Math. 70 (1935) pp. 114–117.

$$(C)\quad E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$(C_1)\quad \sigma_\nu^2\equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}=E\{X_\nu^2\}<\infty \quad (\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$(C')\quad |X_\nu|<\varepsilon b_n,\ (\text{但シ } b_n^2\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu^2)$$

$$(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル條件ヲ導入シ、次ノ定理ヲ証明シタ。

定理３：．(C), (C_1), (C′) ガ共ニ成立ツ時ニハ，任意ノ実数 x ニ関シテ

$$\left|Pr.\left[\frac{S_n}{b_n}<x\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right|<6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

茲ニ、條件 (C), (C) ハ夫々上述ノ (1°), (2°) ニ相應スルコトハ明ラカデアル。（$E_{\nu-1}$ トイフノハ，I デ述ベタ如ク、$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{\nu-1}$ ヲ知ッテノ X_n ノ（條件的）平均値ヲ意味スル）尚條件 (C′) ハ前述ノ (3°), (4°) ニ對應サセルタメノ伏線ヲナスコトモ容易ニ見ラレル。

定理３ノ証明ノ準備：茲デハ，独立級数ニ関シテ知ラレタ Lindeberg ノ方法ヲ襲踏シタ Lévy ノ証明ヲ述ベル。コレヲ Lindeberg-Lévy ノ方法ト略称スルガ、ソノ手法ハ他ノ問題ニモ應用サレソウナ気ガスル。証明ノ骨子トナル点ヲ先ヅ列挙スルト：

〔1〕 確率変数 X ガ如何ナル分布函数デアロウトモ，確率変数 Y ノ分布函数ガ或ル程度ノ滑カサヲ持テバ，X ト Y トガ独立ナトキ，X＋Y ノ分布函数ハ，Y ト同ジ滑ラカヲ保持スル。例ヘバ、Y ノ分布函数ガ連続，或ハ

全連續，或ハ k 回連続微分可能等ニ應ジ，$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ ノ分布函數モ同ジ性質ヲモツ。コノコトハ，$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ ノ分布函數ガ，X, Y ノ分布函數 $F_X(x)$，$F_Y(x)$ カラ[(2)]、Faltung

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)\,dF_X(y)$$

ニ依ツテ與ヘラレルコトカラ明ラカデアル。

〔2〕二ツノ分布函數ノ距離トシテ、次ノヤウニ定義出來ル：分布函數ニハ，可附番無限個ノ不連續點ガアリ得ルガ，ソウイフ不連續點デハ，跳躍ノ上ト下トヲ線分デ結ブコトニ依リ、連續曲線ガ平面上ニ定義サレルコトニナル。今分布函數 $F(x)$，$G(x)$ カラ、カクシテ連續曲線 Γ_1，Γ_2 ヲツクッタトシ、直線 $x+y=c$ ト Γ_1，Γ_2 トノ切口ヲ夫々 $A_1(c)$，$A_2(c)$ トスル。點 $A_1(c)$，$A_2(c)$ ノ距離ヲ $dist.(A_1(c), A_2(c))$ デ示ス。ソノトキ，

$$(F, G) = \underset{-\infty<c<\infty}{u.\,b.}\ dist.\,(A_1(c), A_2(c))$$

ニ依ツテ F ト G トノ距離ヲ定義スル。

(α) 上ノ距離ハ法則收斂（又ハ Bernoulli ノ收斂トモイフ）ヲ特徴付ケル。確率変數ノ系列 $\{X_n\}$ ガ確率変數 X ニ法則收斂ヲナストイフノハ，$F_{\mathrm{X}}(x)$ ノスベテノ連續點ニ於テ $F_{\mathrm{X}_n}(x) \longrightarrow F(x)$ ノ成立スルコトヲイフ。

---

(2) 確率変數 X, Y, ξ 等ノ分布函數ヲ夫々 $F_X(x)$，$F_Y(x)$，$F_\xi(x)$ ト書ク。以下一々斷ラナイコトモアル。

(β) スベテノ實數 x ニ關シテ $|F(x)-G(x)| \leqq h$ ナル常數 h ガアレバ, $(F, G) \leqq \sqrt{2}\,h$.

(γ) 分布函數 $G(x)$ ハ到ル所連續デ、且ツ $G'(x) \leqq b$ ナル正數 b ガアルトスル。

$(F, G) = a$ ナリトスル。然ルトキニハ凡ベテノ實數 x ニ關シテ

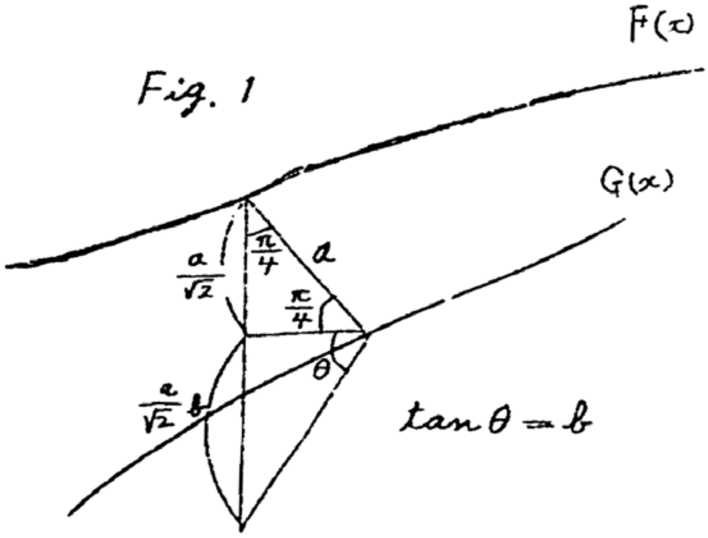

Fig. 1

$$\left|F(x)-G(x)\right| \leqq a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

〔証〕 Fig. 1 カラ明ラカ。

〔3〕 確率変數 X, Z, ξ ハ相互ニ獨立デ (i) $F_Z(x)$ ハ二階マデハ連續ナ微分係數ヲモチ、二階ノ微分係數ノ絶對値ハ或ル常數 k ヲコエナイ; (ii) ξ ハ Gauss ノ分布ニ從ヒ; (iii) X ハ、平均値 0, 標準偏差 σ, 且ツ $|X| \leqq \varepsilon$ ナリトスル。然ル時ニハ

$$\left|F_{X+Z}(x)-F_{\sigma\xi+Z}(x)\right| \leqq \frac{k}{6}\left(\varepsilon\sigma^2+\varepsilon 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma^2\right)$$

〔証〕 X, Z, ξ ハ相互ニ獨立ダカラ

$$F_{X+Z}(x)-F_{\sigma\xi+Z}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_Z(x-y)\,d\left\{F_X(y)-F_{\sigma\xi}(y)\right\}$$

假定 (i) ニ依リ、任意ノ實數 x, y ニ關シテ

$$F_Z(x-y)=F_Z(x)-yF_Z'(x)+\frac{y^2}{2}F_Z''(x)$$

$$+\frac{k y^3}{6}\theta_2(x,y)$$

茲ニ $|\theta_2(x,y)|\leqq 1$、 ト書キ得ル。コレヲ前式ニ代入スル，ソノ際、X，$\sigma\xi$ ハ共ニ平均値 0，標準偏差 σ ナルコトニ注意スレバ：

$$F_{X+Z}(x)-F_{\sigma_\nu\xi+Z}(x)=\frac{k}{6}\int_{-\infty}^{\infty}y^3\theta(x,y)\,d\left[F_X(y)-F_{\sigma\xi}(y)\right]$$

サテ $|X|\leqq\varepsilon$ ナルコトト、$|y|\leqq\varepsilon$ ナラバ，y^3 ハ，εy^2 ヨリ小ナルコトカラ求メル不等式ヲ得ル。（証終）

定理３ノ証明：　簡単ノタメニ，以下 $b_n=1$ トスル。問題ハ $Pr.[S_n<x]-Pr.[\xi<x]$ 即チ $F_{S_n}(x)-\Phi(x)$ ノ評価デアルが、コノタメニ，〔III〕（i）ノ條件ヲ満足シ，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$, ξ ノ何レトモ独立デアルヤウナ確率変数 Z ヲ考ヘ，$\lambda>0$ ヲ任意ニ與ヘテ $F_{S_n+\lambda Z}(x)-F_{\xi+\lambda Z}(x)$ ヲ先ヅ評價スル。コヽデ ξ ノ代リニ、各々ハヤハリ Gauss ノ分布ニ從ヒ，且ツ相互ニ独立デアルヤウナ $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n$ ヲトッテ $\xi=\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\cdots\cdots+\sigma_n\xi_n$ ナラシメル。スルト問題ハ $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n+\lambda Z$ ノ分布函数ト $\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\cdots\cdots+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$ ノ分布函數ノ比較ニナル。

$S_\nu=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_\nu$，$R_{\nu+1}=\sigma_{\nu+1}\xi_{\nu+1}+\cdots\cdots+\sigma_n\xi_n$ ト置クト．

$$Pr.[S_n+\lambda Z<x]-Pr.[\xi+\lambda Z<x]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\left\{Pr_{\nu-1}\left[S_{\nu-1}+X_\nu+R_{\nu+1}+\lambda Z<x\right]\right.$$

$$-Pr_{\nu-1}[S_{\nu-1}+\sigma_\nu\xi_\nu+R_{\nu+1}+\lambda Z<x]\}$$

トシテ書キ表ハサレル。ツマリ、$S_n+\lambda Z$ カラ、$\xi+\lambda Z$ ヘ至ル橋渡シトシテ、中間ニ順次 $S_{n-1}+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$, $S_{n-2}+\sigma_{n-1}\xi_{n-1}+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$, …… $S_1+\sigma_2\xi_2+\cdots+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$ ヲ考ヘタ訳デアル。上式ノ右辺ノ各項ヲ見ルト：

$S_{\nu-1}+R_{\nu+1}+\lambda Z=W_\nu$ ト略記スルト

$$Pr_{\nu-1}[X_\nu+W_\nu<x]-Pr_{\nu-1}[\sigma_\nu\xi_\nu+W_\nu<x]$$

トナル。〔1〕ニ依リ、W_ν ハ，ソノ構成要素タル λZ ト同ジク、二階マデ連続微分可能デ、三階ノ微係数ハ k/λ^3 ヲ越ヘナイ。

従ッテ、條件 (C), (C₁), (C'₂) ニ依リ、〔3〕ノ議論ガ使用出来テ：

$$|Pr_{\nu-1}[X_\nu+W_\nu<x]-Pr_{\nu-1}[\sigma_\nu\xi_\nu+W_\nu<x]|$$

$$\leqq\frac{k}{6\lambda^3}\left(\varepsilon\sigma_\nu^2+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varepsilon\sigma_\nu^2\right)$$

トナル。右辺ハ $k\varepsilon\sigma_\nu^2/2\lambda^3$ ヨリ小デアル。依ッテ辺々相和シテ

$$|Pr.[S_n+\lambda Z<x]-Pr.[\xi+\lambda Z<x]|$$

$$<\frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}\sum_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu^2=\frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}$$

トナル。($b_n=1$ トシタカラ、右辺ハ $k\varepsilon/2\lambda^3$ ニナル)

従ッテ、$\left(F_{S_n+\lambda Z},\ F_{\xi+\lambda Z}\right)\leqq\frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}\sqrt{2}=\sqrt{2}\,\frac{k\varepsilon}{\lambda^3}$ トナル。(〔2〕)

他方、$|Z| \leqq 1$ ナル條件ヲ更ニ Z ニ加ヘルト、〔2〕ニ依リ、$(F_{S_n}, F_{S_n+\lambda Z}) \leqq \sqrt{2}\lambda$, $(F_\xi, F_{\xi+\lambda Z}) \leqq \sqrt{2}\lambda$ トナル。

依ツテ、$(F_{S_n}, F_\xi) < \sqrt{2}\dfrac{k\varepsilon}{\lambda^3} + 2\sqrt{2}\lambda$（距離ノ三角不等式カラ）$k=1$ ニナル様ナ Z ヲトル。

左辺ハモハヤ λ ヲ含マナイ。依ツテ、右辺ヲ最小ナラシメル λ ヲ求メルコトニ依リ、$(F_{S_n}, F_\xi) < 16\varepsilon^{\frac{1}{4}}/3$.

茲デ〔2〕,（γ）ヲ援用スル。ソコニ $G(x)$ ニ相應スルモノトシテ、$\Phi(x)$ ヲトル。$|\Phi'(x)| \leqq 1/\sqrt{2\pi}$ デアルカラ、〔2〕（γ）ニ依リ、

$$|F_{S_n}(x) - F_\xi(x)| \equiv |Pr.[S_n < x] - Pr.[\xi < x]|$$

$$< \frac{16\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)$$

ヲ得ル。右辺ハ $6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ ヨリ小デアル。〔定理3ノ証明終〕

〔註〕 補助ノ確率変数 Z ノ分布函數トシテ、$F_Z(x)=0$（$x<0$ ノトキ）; $F_Z(x) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{\sin \pi x}{2\pi^3}$（$0 \leqq x \leqq 1$ ノトキ）; $F_Z(x) = 1$（$x>1$）ニトレバ、上ノ性質ヲ悉ク満足スル。